UNIDAD 3 ANUALIDADES

Introducción a la unidad

En préstamos, como en adquisiciones de bienes, generalmente los pagos que se efectúan son iguales en intervalos de tiempo y todo indica que la medida común es un año, a menos que se indique lo contrario. A veces sucede que son quincenales, mensuales, bimestrales, trimestrales, tanto para tasas como para los pagos en el tiempo; cuando esto pasa, se habla de convertibilidad de las tasas, cuando coincide tiempo y tasa y el pago de la deuda, o bien cuando todos difieren. El cobro quincenal del sueldo, el pago mensual de la renta de la casa o del departamento, los abonos mensuales para pagar un automóvil, el pago anual de la prima de seguro, los dividendos semestrales sobre las acciones, etc. Es así que hablamos de anualidades.

Objetivo particular de la unidad

Al término de la unidad, el alumno podrá:

- Identificar los diversos tipos de anualidades, sus características y fórmulas correspondientes para poder obtener el monto futuro de una anualidad, su valor presente o actual, su tasa de interés nominal y efectiva, por periodo y anual, así como el número de periodos y plazo de las operaciones.

- Interpretar resultados y comparar con otras situaciones financieras para la toma de decisiones.

Lo que sé:

Sé calcular monto, capital, tasa de interés, tasa de rendimiento, el tiempo, reestructurar deudas, cuándo los periodos de capitalización son continuos y la tasa efectiva, cuándo el interés se capitaliza a cada instante.

Un inversionista pone $300,000.00 que se reinvierten continuamente. Si la tasa de interés es del 18% con capitalización a cada instante:

A) ¿Cuánto reunirá en 5 años?
B) ¿Cuál es la tasa efectiva?

Realiza tu actividad en un procesador de textos, guárdela en tu computadora y una vez concluyas, presiona el botón **Examinar**. Localiza el archivo, ya seleccionado, presiona **Subir este archivo** para guardarlo en la plataforma.

Temas de la unidad III

1. Concepto
2. Anualidades vencidas
3. Anualidades anticipadas
4. Anualidades diferidas

Resumen de la unidad

En la unidad, estudiaremos que una anualidad es un conjunto de pagos iguales realizados a intervalos de tiempo iguales. Pero no necesariamente se dan en periodos de un año, pueden ser periodos semanales, mensuales, quincenales, etc.

Así mismo, definiremos, clasificaremos y conoceremos los elementos de una anualidad, que son la renta, la tasa de interés, monto y el capital.

> Literalmente, la palabra *anualidad* significa "periodos de tiempo de un año", en el campo de las operaciones financieras tiene una definición más amplia, ya que una anualidad estará relacionada con periodos que no necesariamente son anuales sino de cualquier magnitud: semestres, meses, semanales o incluso diarios.

Una **anualidad** es una sucesión de pagos, depósitos, abonos o retiros iguales, que se realizan a intervalos de tiempo iguales con interés compuesto.

Intervalo o periodo de pago o periodo de renta: se conoce como intervalo o periodo de pago al tiempo que transcurre entre un pago y otro.

Renta: es el nombre que se da al pago periódico que se hace.

Plazo de una anualidad: es el tiempo que transcurre entre el inicio del primer pago y el final o último.

Las anualidades son simples si los intervalos de pago son iguales en magnitud y coincide con capitalización de los intereses.

- Son generales cuando los intervalos de pago y los periodos de capitalización de interés no son iguales.
- Son ciertas cuando sus fechas son fijas y se estipulan de antemano.
- Contingentes, cuando la fecha del primer pago, la fecha del último pago o las dos no se fijan de antemano, depende de algún hecho que se sabe ocurrirá, pero no se sabe cuándo.
- Vencidas, cuando se pagan al final del periodo
- Anticipada, cuando se pagan al inicio del periodo
- Inmediatas, son los casos más comunes: la realización de los cobros o pagos tiene lugar en el periodo que sigue inmediatamente al trato.
- Diferidas: se pospone la realización de los cobros o pagos.

Para nombrar a la anualidad se usan de igual forma los términos de *renta*, *pago periódico*, *abono* y tal vez otros más.

Estudiaremos las anualidades diferidas; veremos que son aquellas que los pagos inician después de cierto periodo, acordado tanto por acreedor como por el deudor. En la actualidad, las tiendas departamentales ofrecen este tipo de pagos: “compre ahora y pague después”.

- El capital al igual que en todas las operaciones comerciales es el valor actual de la operación.
- El tiempo es el plazo en que se pacta la operación.
- El momento inicial es cuando se formaliza la operación, también recibe el nombre de convenio, puede existir un pago inicial o no dependerá de ambas partes.

- El periodo de gracia o periodo diferido es el intervalo que transcurre entre el momento inicial y el inicio del primer pago de la anualidad.
- El periodo de gracia se mide utilizando como unidad de tiempo el correspondiente a los periodos de pago.
- La tasa de interés es la que se pacta en un crédito; en compras a crédito generalmente no se indican, suele ser la más alta en el mercado
- Los intereses son los que genera la operación.
- El monto es la acumulación de intereses más capital.

Tema 1. Concepto

Objetivo del tema

Definir y clasificar los elementos de una anualidad. Plantear y resolver problemas de anualidades anticipadas, vencidas y diferidas.

Desarrollo

Una **anualidad** se define como una serie de pagos generalmente iguales que se realizan a intervalos de tiempo iguales. En su sentido más amplio, el concepto anualidad se usa para indicar el pago o depósito de una suma fija a intervalos regulares de tiempo, periodos que pueden ser mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales, etcétera.

Son ejemplo de anualidades los salarios quincenales o mensuales, los fondos de amortización y depreciación, los pagos a plazos, las pensiones, los pagos de primas de pólizas de seguros de vida, de automóviles, las rentas producidas por los fondos de un fideicomiso, los pagos para amortizar créditos hipotecarios, etc.

Clasificación de las anualidades

Las anualidades se clasifican según ciertos criterios expuestos en la siguiente tabla:

Criterio	Tipo
○ Intereses	Simples ---------- Generales
○ Tiempo	Ciertas ---------- Contingentes
○ Pagos	Ordinarias -------- Anticipadas
○ Iniciación	Inmediatas ------- Diferidas

Anualidades simples
Son aquellas en que los periodos de pago coinciden con los periodos de capitalización de intereses. En las generales, no coinciden. En las anualidades ciertas se conocen las fechas del primer pago y del último pago con certeza. En las contingentes pueden no conocerse la fecha de iniciación, o la fecha de terminación, o ambas a la vez.

Anualidades ordinarias
Se llaman también vencidas y es cuando los pagos o depósitos se efectúan ordinariamente al final de cada periodo.

Anualidades anticipadas
Los pagos o depósitos se realizan al principio de cada periodo de tiempo.

Anualidades inmediatas
Son cuando el primer pago se realiza en el primer periodo de la operación financiera.

Anualidades diferidas
En las anualidades diferidas existe un periodo que se llama de “gracia” por lo que se pospone el primer pago o depósito un lapso de tiempo convenido.

Nomenclatura

C	Representa el capital inicial, llamado también principal. Suele representarse también por las letras A o P (valor presente).
M	Representa el capital final, llamado también monto o dinero incrementado. Es el valor futuro de *C*.
R	Es la renta, depósito o pago periódico.
J	Es la tasa nominal de interés calculada para un periodo de un año. Se expresa en tanto por uno o tanto por ciento.
i	Es la tasa de interés por periodo de tiempo y representa el costo o rendimiento por periodo de capitalización de un capital ya sea producto de un préstamo una cantidad que se invierte. Es el cociente de dividir la tasa nominal entre la frecuencia de conversión *m*.
m	Es la frecuencia de conversión o de capitalización y representa el número de veces que se capitaliza un capital en un año.
n_a	Es el número de años que permanece prestado o invertido un capital.
n	Es el número de periodos de que consta una operación financiera a interés compuesto.

Finalmente, para estudiar las anualidades, tomando en cuenta su clasificación, en cada caso, se deberán resolver los problemas siguientes:

1. Determinar el monto (M) o valor actual (C) de una serie de anualidades.
2. Establecer el valor de la anualidad (renta = R) en la etapa del monto o del valor actual.
3. Precisar la tasa (i) en función del monto o del valor actual.
4. Determinar el tiempo (n) en los problemas de monto y de valor actual (más el tiempo diferido, cuando se trate de esta clase de anualidades).

Es muy importante señalar que lo mismo que en el interés compuesto, en donde las variables n (números de pagos) e i (tasa de interés), se expresan en la misma medida de tiempo, en las anualidades se agrega una variable, la renta (R), que debe estar en la misma medida de tiempo.

ACTIVIDAD 1

1. Elabora un cuadro donde clasifiques las anualidades de acuerdo con los diferentes criterios.
2. Da tres ejemplos de anualidades anticipadas.
3. Da tres ejemplos de anualidades vencidas.
4. Define anualidad.
5. ¿De cuántas formas puedes clasificar las anualidades?
6. Define las anualidades contingentes.
7. Define las anualidades diferidas.

Realiza esta actividad en un procesador de textos, guárdala en tu computadora y, una vez concluida, presiona el botón **Examinar**, localiza el archivo, selecciónalo y haz clic en **Subir este archivo** para guardarlo en la plataforma.

Bibliografía básica

Autor	Capítulo	Páginas
1. Díaz	4	- - -

Autoevaluación

Relaciona los conceptos con sus definiciones. Arrastra la letra correspondiente para completar el enunciado. Una vez que concluyas, obtendrás tus aciertos de manera automática.

☐ **1.** Los pagos inician al final de cierto periodo, acordado tanto por acreedor como por el deudor. ☐ **2.** Se empiezan a cubrir después de un tiempo diferido, cuando se comenzará a pagar la deuda o crédito. ☐ **3.** Los pagos o depósitos se efectúan ordinariamente al inicio de cada periodo. ☐ **4.** Serie o de pagos o depósitos que se realizan en periodos de tiempo iguales. ☐ **5.** Puede no conocerse la fecha de iniciación, o la fecha de terminación, o ambas a la vez.	a Anualidades contingentes b Anualidades c Anualidades diferidas d Anualidades anticipadas e Anualidades vencidas

Tema 2. Anualidades vencidas

Objetivo del tema

Obtener el monto, la renta, el tiempo y la tasa de interés en problemas que impliquen anualidades vencidas.

Desarrollo

Monto de una anualidad ordinaria

El monto de las anualidades ordinarias o vencidas es la suma de los montos de todas y cada una de las rentas que se realizan hasta el momento de realizar la última.

Ejercicio 1. Una persona decide depositar $5,000.00 al fin de cada mes en una institución financiera que le abonará intereses del 12% convertible mensualmente: el 1% mensual durante 6 meses. Se pide calcular y conocer el monto que se llegue a acumular al final del plazo indicado.

CONCEPTO	CANTIDAD
Depósito al final del primer mes	5,000.00
Intereses por el segundo mes (5000 x 0.01)	50.00
Suma	5,050.00
Depósito al final del segundo mes	5,000.00
Monto al final del segundo mes	10,050.00
Intereses por el tercer mes (10050 x 0.01)	100.50
Depósito al final del tercer mes	5,000.00
Monto al final del tercer mes	15,150.50
Intereses por el cuarto mes (15150.50 x 0.01)	151.51

Depósito al final del cuarto mes	5,000.00
Monto al final del cuarto mes	20,302.01
Intereses por el quinto mes (20302.01 x 0.01)	203.02
Depósito al final del quinto mes	5,000.00
Monto al final del quinto mes	25,505.03
Intereses por el sexto mes (25505.03 x 0.01)	255.05
Depósito al final del sexto mes	5,000.00
Monto final (al término del sexto mes)	30,760.08

Ahora bien, si el monto total es igual a la suma de los montos de cada anualidad, llegaremos al mismo resultado:

Monto de la primera renta:	$M = 5,000(1.01)^5$	5,255.05
Monto de la primera renta:	$M = 5,000(1.01)^4$	5,203.02
Monto de la tercera renta:	$M = 5,000(1.01)^3$	5,151.51
Monto de la tercera renta:	$M = 5,000(1.01)^2$	5,100.50
Monto de la quinta renta:	$M = 5,000(1.01)^1$	5,050.00
Monto de la sexta renta:	$M = 5,000(1.01)^0$	5,000.00
Monto total		30,760.08

Fórmulas para calcular el monto futuro de una anualidad simple, cierta, ordinaria

Se conoce la renta, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo:

	$M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$	(1)
Siendo	$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	

Ejercicio 1. Si se aplica la fórmula anterior a los datos del ejercicio 1, se tiene:

Desarrollo

Fórmula: $M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:

$R = 5{,}000$

$J = 0.12$

$m = 12$

$n = 6$

Solución: $i = \dfrac{0.12}{12} = 0.01$

$$M = 5{,}000\frac{(1+0.01)^6 - 1}{0.01} \qquad M = 30{,}760.08$$

Ejercicio 2. Calcular el monto futuro de una serie de depósitos semestrales de $20,000.00 durante 2.5 años en una cuenta bancaria que rinde:

a) El 10% capitalizable semestralmente
b) El 12% capitalizable semestralmente
c) Interpretar resultados

Desarrollo

a) Tasa 10%:

Fórmula: $M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:
$R = 20{,}000$
$J = 0.10$
$m = 2$
$n_a = 2.5$

$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Solución: $i = \dfrac{0.10}{2} = 0.05$ $n = 2 \times 2.5 = 5$

$M = 20{,}000\dfrac{(1+0.05)^5 - 1}{0.05}$ $M = 110{,}512.62$

b) Tasa 12%:

Fórmula: $M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:

$R = 20{,}000$

$J = 0.12$

$m = 2$

$n_a = 2.5$

$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Solución: $i = \dfrac{0.12}{2} = 0.06$ $n = 2 \times 2.5 = 5$

$M = 20{,}000\dfrac{(1+0.06)^5 - 1}{0.06}$ $M = 112{,}741.86$

c) Interpretación:

Existe una diferencia de $2,229.24, lo que representa un 2.02% al aumentar la tasa 2 puntos porcentuales.

Valor actual de una anualidad ordinaria

Cuando la época del cálculo coincide con la iniciación de la serie de pagos o rentas, el valor equivalente de la serie es actual. El lapso que transcurre entre la fecha de la entrega del valor actual y el vencimiento de la primera anualidad será igual a cada periodo que separa a las demás rentas.

El valor presente o actual de las anualidades ordinarias se puede presentar en alguna de estas dos modalidades:

a. Como el descuento de una serie de anualidades, que vencen escalonadamente y están separadas por intervalos iguales de tiempo.

b. Como la determinación de un capital que, invertido a interés, proporciona una serie de rentas futuras.

Ejercicio 3. Se tienen seis pagarés con vencimientos escalonados en forma cuatrimestral, cada uno de $25,000.00, y se quieren liquidar el día de hoy, siendo una tasa del 6% cuatrimestral.

Determinemos el valor actual o presente de cada documento:

OPERACIÓN $C = M(1+i)^{-n}$	RESULTADO
1era. renta: $C = 25,000(1+0.06)^{-1}$	23,584.91
2da. renta $C = 25,000(1+0.06)^{-2}$	22,249.91
3ra. renta $C = 25,000(1+0.06)^{-3}$	20,990.48
4a. renta $C = 25,000(1+0.06)^{-4}$	19,802.34
5a. Renta $C = 25,000(1+0.06)^{-5}$	18,681.45
6a. Renta $C = 25,000(1+0.06)^{-6}$	17,624.01
VALOR ACTUAL TOTAL	122,933.10

Ahora bien, ¿qué cantidad habrá que invertir al 6% cuatrimestral para tener derecho a recibir seis rentas de $25,000.00 cada una? Conforme a la resolución anterior, se sabe que el valor actual es de $122,933.10. Comprobemos si con el importe de seis pagos de $25,000.00 cada uno el deudor salda su cuenta.

Capital invertido	122,933.10
Intereses del 1er. cuatrimestre (0.06)	7,375.98
Suma	130,309.08
Menos el pago de la 1a. renta	25,000.00
Saldo al final del 1er. cuatrimestre	105,309.08
Intereses del saldo (0.06)	6,318.55
Suma	111,627.63
Menos el pago de la 2a. renta	25,000.00
Saldo al final del 2o. cuatrimestre	86,627.63
Intereses del saldo (0.06)	5,197.65
Suma	91,825.28
Menos el pago de la 3a. renta	25,000.00
Saldo al final del 3er. cuatrimestre	66,825.28
Intereses del saldo (0.06)	4,009.52
Suma	70,834.80
Menos el pago de la 4a. renta	25,000.00
Saldo al final del 4o. cuatrimestre	45,834.80
Intereses del saldo (0.06)	2,750.09
Suma	48,584.89
Menos el pago de la 5a. renta	25,000.00
Saldo al final del 5o. cuatrimestre	23,584.89
Intereses del saldo (0.06)	1,415.09
Suma	24,999.98
Menos el pago de la 6a. renta	25,000.00
SALDO FINAL	–0.02*

** Por el redondeo de cifras*

Dado lo anterior, se debe encontrar el valor actual de cada pago para determinar el valor presente total de la serie de rentas. Podemos decir que el valor actual es igual a la suma de los valores actuales de cada renta.

Fórmulas para calcular el valor presente de una anualidad simple, cierta, ordinaria

	$C = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	(2)
en donde	$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	

Ejercicio 4. Utilizando los datos del ejercicio anterior, obtener su valor presente o actual.

Desarrollo

Fórmula: $C = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Datos:

$R = 25{,}000$

$i = 0.06$

$m = 4$

$n = 6$

Solución:

$$C = 25{,}000\frac{1-(1+0.06)^{-6}}{0.06} \qquad C = 122{,}933.11$$

Ejercicio 5. ¿Cuál es el valor en efectivo de una anualidad de $1,000.00 al final de cada 3 meses durante 5 años con un interés del 16% capitalizable trimestralmente? Comprobar calculando el monto futuro de la operación mediante interés compuesto y anualidad e interpretar resultados.

Desarrollo

a) Valor presente:

Fórmula: $$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Datos:
$$R = 1{,}000$$
$$J = 0.16$$
$$m = 4$$
$$n_a = 5$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $$i = \frac{0.16}{4} = 0.04 \qquad n = 4\times 5 = 20$$

$$C = 1{,}000\frac{1-(1+0.04)^{-20}}{0.05} \qquad C = 13{,}590.33$$

b) Comprobación:

b_1) Monto de una anualidad:

Fórmula: $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Datos: $i = \dfrac{0.16}{4} = 0.04$ $n = 4 \times 5 = 20$

Solución:

$$M = 1{,}000\,\frac{(1+0.04)^{20}-1}{0.04} \qquad M = 29{,}778.08$$

b_2) Monto de interés compuesto:

Fórmula: $$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Datos:

$$R = 1{,}000$$
$$J = 0.16$$
$$m = 4$$
$$n_a = 5$$

Fórmulas:

$$M = C(1+i)^n$$
$$i = \frac{J}{m} \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$$C = 13{,}590.33$$
$$J = 0.16$$
$$m = 4$$
$$n_a = 5$$

Solución:

$$i = \frac{0.16}{4} = 0.04 \qquad n = 4 \times 5 = 20$$

$$M = 13{,}590.33(1+0.04)^{20} = 29{,}778.08$$

c) Interpretación:

Los resultados son idénticos al obtener el monto futuro de una anualidad simple, cierta, ordinaria y el monto futuro a interés compuesto.

Fórmulas para calcular la renta de una anualidad simple, cierta, ordinaria

a) Si se conoce el capital inicial, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

	$R = \dfrac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$	(3)
siendo	$i = \dfrac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$	

b) Si se conoce el monto futuro, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

	$R = \dfrac{Mi}{(1+i)^{n}-1}$	(4)
siendo	$i = \dfrac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$	

Ejercicio 6. ¿Cuál es la renta mensual que se requiere para obtener $30,760.08 durante 6 meses si se invierte con el 12% capitalizable mensualmente?

Desarrollo

Fórmula: $$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

Datos:

$$M = 30{,}760.08$$
$$J = 0.12$$
$$m = 12$$
$$n_a = 0.5$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $$i = \frac{0.12}{12} = 0.01 \qquad n = 12 \times 0.5 = 6$$

$$R = \frac{30{,}760.08 \times 0.01}{(1+0.01)^6 - 1} \qquad R = 5{,}000.00$$

Ejercicio 7. Una empresa debe de pagar dentro de 6 meses la cantidad de $200,000.00. Para asegurar el pago, el contralor propone por liquidez reunir un fondo con depósitos mensuales que paga el 10% capitalizable mensualmente.

a) Obtener el valor de los depósitos.
b) ¿Cuál es el valor acumulado al 4° mes?
c) Interpretar resultados.

Desarrollo

a) Cálculo de R:

Fórmula: $R = \dfrac{Mi}{(1+i)^n - 1}$

Datos:

$M = 200{,}000.00$

$J = 0.10$

$m = 12$

$n_a = 0.5$

$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Solución: $i = \dfrac{0.10}{12} = 0.008333$ $n = 12 \times 0.5 = 6$

$R = \dfrac{200{,}000 \times 0.008333}{(1+0.018)^6 - 1}$ $R = 32{,}645.61$

b) Cálculo al 4o mes:

Fórmula: $M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:

$R = 32{,}645.61$

$J = 0.10$

$m = 12$

$n_a = 0.333333$

$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Solución:

$$i=\frac{0.10}{12}=0.008333 \qquad n=12\times 0.333333=4$$

$$M=32{,}645.61\frac{(1+0.008333)^{4}-1}{0.008333} \qquad M=132{,}223.80$$

a) Interpretación:

Es posible calcular, con base en valor de la renta obtenido, cualquier monto en algún mes determinado.

Ejercicio 8. Una persona adquiere a crédito una computadora en 4 meses. Calcular el pago mensual si el precio de contado es de $19,750.00:

a) A una tasa de interés del 21.6%.

b) Si la tasa aumenta en 2 pcc

c) Interpretar resultados

Desarrollo

a) Tasa 21.6%:

Fórmula: $$R=\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$$

Datos:

$$C=19{,}750.00$$
$$J=0.216$$
$$m=12$$
$$n_a=0.333333$$

$$i=\frac{J}{m} \quad y \quad n=n_a\times m$$

Solución: $i = \dfrac{0.216}{12} = 0.018$ $n = 12 \times 0.333333 = 4$

$$R = \frac{19{,}750 \times 0.018}{1-(1+0.018)^{-4}} \qquad R = 5{,}161.67$$

b) Tasa 23.6%:

Fórmula: $$R = \frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}$$

Datos:

$$C = 19{,}750.00$$
$$J = 0.236$$
$$m = 12$$
$$n_a = 0.333333$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución:

$$i = \frac{0.236}{12} = 0.0196667 \qquad n = 12 \times 0.333333 = 4$$

$$R = \frac{19{,}750 \times 0.0196667}{1-(1+0.0196667)^{-4}} \qquad R = 5{,}182.62$$

c) Interpretación:

Existe una diferencia de $20.95, lo que representa un 0.41% al aumentar la tasa 2 puntos porcentuales.

Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una anualidad simple, cierta, ordinaria

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

	$$n = \frac{Ln \quad \dfrac{1}{1-\frac{C}{R}i}}{Ln \quad (1+i)}$$	(5)
en donde	$i = \dfrac{J}{m}$	

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

	$$n = \frac{Ln \quad \left(\frac{M}{R}i+1\right)}{Ln \quad (1+i)}$$	(6)
en donde	$i = \dfrac{J}{m}$	

Ejercicio 9. ¿Cuántos pagos deben realizarse para llegar a acumular $30,760.08 si se depositan $5,000.00 mensuales con una tasa de interés del 12% compuesto mensual?

Desarrollo

Fórmula: $$n=\frac{Ln\left(\frac{M}{R}i+1\right)}{Ln\,(1+i)}$$

Datos:
$$M=30,760.08$$
$$R=5,000.00$$
$$J=0.12$$
$$m=12$$

$$i=\frac{J}{m}\quad y\quad n=n_a\times m$$

Solución: $$i=\frac{0.12}{12}=0.01$$

$$n=\frac{Ln\left(\frac{30,760.08}{5,000}0.01+1\right)}{Ln\,(1+0.01)}=6\ \ meses$$

Ejercicio 10. ¿Cuántos pagos bimestrales vencidos de $1,550.00 se tendrían que hacer para saldar una deuda pagadera hoy de $8,000.00 si el 1er. pago se realiza dentro de 2 meses y el interés es del 2.75% bimestral?

a) Expresar el resultado en años, meses y días.

b) Calcular el monto del pago último (2 casos: 4 pagos de $1,550.00 y un 5° pago mayor de esta cantidad ó 5 pagos de $1,550.00 y uno 6° menor).

c) Comprobar estos resultados con base en sus respectivos valores actuales.

Desarrollo

a) No. de pagos y plazo:

Fórmula:

$$n = \frac{Ln \quad \frac{1}{1-\frac{C}{R}i}}{Ln \ (1+i)}$$

Datos:

$$C = 8{,}000.00$$
$$R = 1{,}550.00$$
$$i = 0.0275$$
$$m = 6$$

Solución:

$$n = \frac{Ln \quad \frac{1}{1-\frac{8{,}000}{1{,}550}0.0275}}{Ln \ (1+0.0275)}$$

$$n = 5.642592 \ \ bimestres$$

$$n = 0 \ años \, 11 \ meses \ 9 \, días$$

b) Monto último pago:

b_1) 4 pagos iguales y uno mayor:

Fórmula: $M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:
$R = 1{,}550.00$
$i = 0.0275$
$n = 5$

Solución: $M_1 = \frac{(1+0.0275)^5 - 1}{0.0275} = 8{,}188.13$

Valor del adeudo después de 5 bimestres:

Fórmula: $M = C(1+i)^n$

Datos:
$C = 8{,}000.00$
$i = 0.0275$
$n = 5$

Solución: $M_2 = 8{,}000(1+0.0275)^5 = 9{,}162.19$

Diferencia: $M_1 - M_2 = 9{,}162.19 - 8{,}188.13 = 974.06$

Último pago: $R + (M_1 - M_2) = 1{,}550.00 + 974.06 = 2{,}524.06$

Conclusión:

Serán entonces 4 pagos de $1,550.00 y uno mayor de $2,524.06

b_2) 5 pagos iguales y uno mayor:

Fórmula: $M = C(1+i)^n$

Datos:

$C = 974.06$
$i = 0.0275$
$n = 1$

Solución: $M_3 = 974.06(1+0.0275)^1 = 1{,}000.84$

Último pago: $\$1{,}000.84$

Conclusión:

Serán entonces 5 pagos de 1,550.00 y uno menor de $1,000.84

Fórmulas para calcular la tasa de interés de una anualidad simple, cierta, ordinaria.

Debido a que la tasa de interés se encuentra en el numerador y en el denominador de las fórmulas de monto y valor actual de una anualidad simple, cierta, ordinaria, no se puede despejar por lo que se usa para su cálculo, el **procedimiento** llamado de **prueba y error a base de iteraciones sucesivas**.

También se puede utilizar una calculadora programable, calculadora financiera o una computadora con software financiero.

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

	$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	(7)
siendo	$i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

	$\frac{M}{R}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$	(8)
siendo	$i=\frac{J}{m}$ y $n=n_a\times m$	

Ejercicio 11. ¿A qué tasa se aplicó una serie de 6 pagos mensuales de \$5,000.00 cada uno, para acumular, al final de los mismos, \$30,760.08?

Desarrollo

Fórmulas: $$\frac{M}{R}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Datos:

$$M=30,760.08$$
$$R=5,000.00$$
$$m=1$$
$$n=6$$

Solución:

$$\frac{30,760.08}{5,000} = 6.152016 = \frac{(1+i)^6 - 1}{i}$$

$Si\ \ i = 0.005$ $\qquad \dfrac{1.005^6 - 1}{0.005} = 6.075502$

$Si\ \ i = 0.012$ $\qquad \dfrac{1.012^6 - 1}{0.012} = 6.182906$

$Si\ \ i = 0.01$ $\qquad \dfrac{1.01^6 - 1}{0.01} = 6.152015$

$$\therefore \quad i = 0.01\ mensual = 12.0\%\ anual$$

Ejercicio 12. Calcular con qué tasa de rendimiento nominal anual se acumulan $400,000.00 con 15 depósitos semestrales de $12,000.00.

a) Tasa de interés semestral.

b) Tasa nominal.

c) Tasa efectiva anual.

d) interpretar resultados.

Desarrollo

a) Cálculo de la tasa semestral:

Fórmulas: $\qquad \dfrac{M}{R} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:

$M = 400{,}000.00$

$R = 12{,}000.00$

$m = 2$

$n_a = 7.5$

$n = m \times n_a$

Solución: $n = 12 \times 7.5 = 15$

$$\frac{400{,}000}{12{,}000} = 33.333333 = \frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$$

$Si \;\; i = 0.10$ $$\frac{1.10^{15} - 1}{0.10} = 31.772482$$

$Si \;\; i = 0.105$ $$\frac{1.105^{15} - 1}{0.105} = 33.060035$$

$Si \;\; i = 0.106$ $$\frac{1.106^{15} - 1}{0.106} = 33.324398$$

$\therefore \;\; i = 0.106 \; semestral = 10.6\% \; semestral$

b) Cálculo de la tasa nominal:

Fórmulas: $J = i \times n$

Datos:

$i = 0.106$

$m = 2$

$n_a = 1$

$n = m \times n_a$

Solución: $n = 2 \times 1 = 2$

$$J = 0.106 \times 2 = 0.212 = 21.2\%$$

c) Cálculo de la tasa efectiva anual:

Fórmulas: $e = (1+i)^n - 1$

Datos:
$i = 0.106$
$m = 2$
$n_a = 1$

$$n = m \times n_a$$

Solución: $n = 2 \times 1 = 2$

$$e = (1 + 0.106)^2 - 1 = 0.2232 = 22.3\%$$

d) Interpretación:

Existe una diferencia de 1.1 puntos porcentuales lo que representa un 5.2% mayor la tasa efectiva de la tasa nominal anual.

Ejercicio 13. Un deudor requiere pagar hoy $175,000.00 pero al no disponer de esa cantidad acuerda con el acreedor liquidar en 6 mensualidades de $31,000.00 cada una la 1ª de ellas dentro de un mes.

a) Calcular la tasa por período de esta operación financiera.
b) Obtener su tasa nominal anual.
c) Obtener la tasa efectiva anual.
d) Interpretar resultados.

Desarrollo

d) Cálculo de la tasa mensual:

Fórmulas: $\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Datos:

$C = 175{,}000.00$

$R = 31{,}000.00$

$m = 12$

$n_a = 0.5$

$n = m \times n_a$

Solución: $n = 12 \times 0.5 = 6$

$$\frac{175{,}000}{31{,}000} = 5.645161 = \frac{1-(1+i)^{-6}}{i}$$

$Si\ \ i = 0.02$ $\quad \frac{1-1.02^{6}}{0.02} = 5.601431$

$Si\ \ i = 0.018$ $\quad \frac{1-1.018^{6}}{0.018} = 5.639435$

$Si\ \ i = 0.0177$ $\quad \frac{1-1.0177^{6}}{0.0177} = 5.645169$

$\therefore \quad i = 0.0177\ mensual = 1.77\%\ mensual$

d) Cálculo de la tasa nominal:

Fórmulas: $J = i \times n$

Datos:

$$i = 0.0177$$
$$m = 12$$
$$n_a = 1$$

$$n = m \times n_a$$

$$J = 0.0177 \times 12 = 0.2124 = 21.2\%$$

c) Cálculo de la tasa efectiva anual:

Fórmulas: $e = (1+i)^n - 1$

Datos:

$$i = 0.0177$$
$$m = 12$$
$$n_a = 1$$

$$n = m \times n_a$$

Solución: $n = 12 \times 1 = 12$

$$e = (1+0.0177)^{12} - 1 = 0.2343 = 23.4\%$$

d) Interpretación:

Existe una diferencia de 2.2 puntos porcentuales, lo que representa un 10.4% mayor a la tasa efectiva de la tasa nominal anual.

Solución: $n = 12 \times 1 = 12$

ACTIVIDAD 1

Descarga los siguientes **ejercicios** y resuélvelos en un procesador de texto.
Una vez que tengas todos, ingresa tus resultados en el espacio en blanco.

• Calcular el monto futuro de una serie de depósitos semestrales de $20,000.00 durante 2.5 años en una cuenta bancaria que rinde:

a) El 10% capitalizable semestralmente.

M = $ ___________

b) El 12% capitalizable semestralmente

c) Interpreta tu resultado. (Da tu interpretación dando clic en el botón "Editar mi envío" que aparece al final de la página)

M= $____________

• ¿Cuál es el valor en efectivo de una anualidad de $1,000.00 al final de cada 3 meses durante 5 años con un interés del 16% capitalizable trimestralmente? Comprobar calculando el monto futuro de la operación mediante interés compuesto y anualidad e interpretar resultados.

M1= $_____________

M2= $_____________

• Una empresa debe de pagar dentro de 6 meses la cantidad de $200,000.00. Para asegurar el pago el contralor propone por liquidez reunir un fondo con depósitos mensuales que paga el 10% capitalizable mensualmente.

a) Obtener el valor de los depósitos.

R= $____________

b) ¿Cuál es el valor acumulado al 4° mes?

c) Interpreta tu resultado. (Da tu interpretación dando clic en el botón "Editar mi envío" que aparece al final de la página)

M = $_____________

• Cuántos pagos bimestrales vencidos de $1,550.00 se tendrían que hacer para saldar una deuda pagadera hoy de $8,000.00 si el 1er. pago se realiza dentro de 2 meses y el interés es del 2.75% bimestral.

a) Expresar el resultado en años, meses y días.

___año, ____ meses____ días. (Completa la frase separando con un guión [-] tu resultado)

R=________________

b) Calcular el monto del pago último (2 casos: 4 pagos de $1,550.00 y un 5° pago mayor de esta cantidad o 5 pagos de $1,550.00 y uno 6° menor).

Comprobar estos resultados con base en sus respectivos valores actuales.

M1 = $_____________.

M2 = $_____________

Bibliografía básica

Autor	Capítulo	Páginas
1. Díaz	3	158-197

Autoevaluación

Responde las siguientes preguntas en el espacio correspondiente (coloca sólo dos decimales para las que así lo requieran). Una vez que concluyas, obtendrás tu calificación de manera automática.

1. La Sra. Rosas quiere juntar dinero para irse de viaje dentro de 6 meses, por lo que empieza ha depositar $5,000.00 al fin de cada mes en una institución financiera que le abonará intereses del 12% convertible mensualmente.

¿Cuánto reunirá la Sra. Rosas al final del plazo indicado?

M= $ ______________

2. ¿Qué cantidad mensual necesitaría La Sra. Rosas invertir durante 6 meses para reunir $30,760.075 si consigue una tasa de 12% capitalizable mensualmente?

R= $ ______________

3. La familia Rosales compra un terreno que pagará con pagos mensuales de $1,239.66, hasta juntar $100,000.00, pero desea saber cuántos pagos hará, ya que la tasa de interés es 1.83% mensual con capitalización mensual.

R= $ ______________

4. El Sr. Padúa quiere reunir $75,000, para, cuando su hijo menor cumpla 18 años, regalarle un coche. Quiere hacer depósitos mensuales por 4 años, que es cuando cumplirá 18 años su hijo, en una inversión que paga el 19% con capitalización mensual. ¿Cuánto tendrá que depositar el Sr. Padúa cada mes para cumplir su objetivo?

R= $ ______________

5. El papá de Juanito Romo, quien tiene 10 años, empieza a ahorrar para que Juanito pueda estudiar una carrera universitaria. Planea depositar $500 en una cuenta que paga el 27% con capitalización bimestral, por 8 años. ¿Cuánto ahorrará el papá de Juanito?

R= $ ______________

6. Quiero reunir $17,450.26 con depósitos bimestrales vencidos de $430.23 cada uno. Si la tasa de interés es 18.3% capitalizable cada bimestre, ¿cuántos depósitos bimestrales tengo que hacer en cuantos meses?

R= ______________ pagos bimestrales

R= En ______________ meses

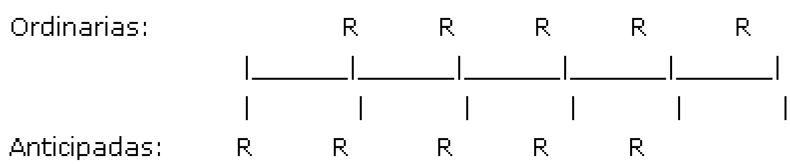
Tema 3. Anualidades anticipadas

Objetivo del tema

Identificar qué es una anualidad anticipada en problemas específicos en las cuales se aplican.

Desarrollo

A diferencia de las anualidades vencidas, que se pagan al final de cada periodo, las anticipadas se cubren al comienzo de cada periodo.



En las **anualidades ordinarias**, la primera anualidad se paga al final del periodo, mientras que en las anticipadas se realiza al comenzar. Por eso, el pago de la última renta ordinaria coincide con la terminación del plazo de tiempo estipulado en la operación; esto hace que no produzca intereses y que su inversión se haga solamente como complemento del monto de las rentas. En tanto, en las **anualidades anticipadas**, la última renta se paga al principio del último periodo: sí produce intereses.

Fórmulas para calcular el monto futuro de una anualidad simple, cierta, anticipada

Se conoce la renta, la tasa nominal, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo:

$M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$	(1)
o también $M = R\left[\dfrac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$	
siendo $i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	

Ejercicio 1. Si se hacen 6 depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 cada uno con una tasa del 20% capitalizable trimestralmente, ¿cuál es el monto futuro?

R = $25,000.00 trimestrales

i = 20% capitalizable trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

n = 6 trimestres

M = $178,550.21

Desarrollo

a). ARITMÉTICAMENTE

1ª renta (principio del primer trimestre)	$25,000.00
Intereses por el primer trimestre	1,250.00
2ª renta (principio del segundo trimestre)	25,000.00
Monto al final del primer trimestre	51,250.00
Intereses por el segundo trimestre	2,562.50
3ª renta (principio del tercer trimestre)	25,000.00

Monto al final del segundo trimestre	78,812.50
Intereses por el tercer trimestre	3,940.63
4ª renta (principio del cuarto trimestre)	25,000.00
Monto al final del tercer trimestre	107,753.13
Intereses por el cuarto trimestre	5,387.65
5ª renta (principio del quinto trimestre)	25,000.00
Monto al final del cuarto trimestre	138,140.78
Intereses por el quinto trimestre	6,907.04
6ª renta (principio del sexto trimestre)	25,000.00
Monto al final del quinto trimestre	170,047.82
Intereses por el sexto trimestre	8,502.39
Monto al final del sexto trimestre	$178,550.21

b). POR FÓRMULA

Fórmulas: $$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

Datos:

$$R = 25{,}000$$
$$J = 0.20$$
$$m = 4$$
$$n = 6$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $$i = \frac{0.20}{4} = 0.05$$

$$M = 25{,}000\frac{(1+0.05)^6 - 1}{0.05}(1+0.05)$$
$$M = 178{,}550.21$$

Ejercicio 2.

a) Obtener el monto que se acumula en 2 años si se depositan $1,500.00 al inicio de cada mes en un banco que abona una tasa del 12.5% anual capitalizable por meses.

b) Obtener el monto si se hacen depósitos de un 20% más.

c) Interpretar resultados.

Desarrollo

a) Monto de una anualidad anticipada:

Fórmulas: $$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

Datos:

$$R = 1{,}500$$
$$J = 0.125$$
$$m = 12$$
$$n_a = 2$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución:

$$i = \frac{0.125}{12} = 0.010417 \qquad n = 2 \times 12 = 24$$

$$M = 1{,}500\frac{(1+0.010417)^{20} - 1}{0.010417}(1+0.010417)$$

$$M = 41{,}084.44$$

b) Si se deposita un 20% más:

Fórmulas: $$M = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)$$

Datos:

$$R = 1{,}500 \times 1.20 = 1{,}800$$
$$J = 0.125$$
$$m = 12$$
$$n_a = 2$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución:

$$i = \frac{0.125}{12} = 0.010417 \qquad n = 2 \times 12 = 24$$

$$M = 1{,}800\frac{(1+0.010417)^{20}-1}{0.010417}(1+0.010417)$$
$$M = 49{,}301.33$$

c) Interpretación:

El monto aumentará también un 20% ya que la renta es independiente de los demás factores.

Fórmulas para calcular el valor presente de una anualidad simple, cierta, anticipada

$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$	o también	$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$	(2)
	en donde	$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$	

Ejercicio 3. ¿Cuál es el capital de 6 depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 si se calculan con 20% compuesto trimestralmente?

Desarrollo

Fórmulas: $C = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$

Datos:
$R = 25,000.00$
$J = 0.20$
$m = 4$
$n = 6$

$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Solución: $i = \dfrac{0.20}{4} = 0.05$

$$C = 25,000\frac{1-(1+0.05)^{-6}}{0.05}(1+0.05)$$
$$C = 133,233.92$$

Ejercicio 4. Una persona alquila un local acordando pagar $2,750.00 de renta mensual. Sin embargo, por motivo de viaje desea adelantar un año de renta.

a) Calcular el valor de esa renta anticipada si la tasa de rendimiento en un banco es del 16.5%.
b) Si la tasa fuera de un 15.5% ¿Cuál sería el pago adelantado de un año?
c) Interpretar resultados.

Desarrollo

a) Valor actual de una anualidad anticipada:

Fórmulas: $$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$

Datos:

$R = 2{,}750$

$J = 0.165$

$m = 12$

$n_a = 1$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución:

$$i = \frac{0.165}{12} = 0.013750 \qquad n = 1\times 12 = 12$$

$$C = 2{,}750\frac{1-(1+0.01375)^{-12}}{0.01375}(1+0.01375)$$

$$C = 30{,}646.20$$

b) Tasa del 15.5%:

Fórmulas: $$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$

Datos:

$R = 2{,}750$

$J = 0.155$

$m = 12$

$n_a = 1$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución:

$$i = \frac{0.155}{12} = 0.012917 \qquad n = 1 \times 12 = 12$$

$$C = 2{,}750\,\frac{1-(1+0.012917)^{-12}}{0.012917}(1+0.0112917)$$

$$C = 33{,}531.13$$

c) Interpretación:

Si la tasa es menor en un punto porcentual, el pago adelantado inicial aumenta en $ 2,884.93 lo que representa un incremento del 9.41%.

Fórmulas para calcular la renta de una anualidad simple, cierta, anticipada

a) Si se conoce el capital inicial, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

	$R = \dfrac{Ci}{1+i-(1+i)^{-n+1}}$	(3)
siendo	$i = \dfrac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$	

Si se conoce el monto futuro, la tasa de interés nominal o por periodo de capitalización, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

	$R = \dfrac{Mi}{(1+i)^{n+1} - i - 1}$	(4)
siendo	$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	

Ejercicio 5. ¿De cuánto es cada uno de 6 pagos trimestrales anticipados que se deben realizar para liquidar una deuda de \$133,236.92 si se impone una tasa de interés de 20% compuesto trimestralmente?

Desarrollo

Fórmulas: $R = \dfrac{Ci}{1+i-(1+i)^{-n+1}}$

Datos:

$C = 133,236.92$

$J = 0.20$

$m = 4$

$n = 6$

$i = \dfrac{J}{m}$

Solución: $i = \dfrac{0.20}{4} = 0.05$

$$R = \frac{133,236.92 \times 0.05}{1+.05-(1+.05)^{-6+1}}$$

$$R = 25,000.00$$

Ejercicio 6. Una persona debe pagar $102,500.00 dentro de 2 años y, para reunir esa cantidad, decide efectuar 12 depósitos bimestrales en una cuenta de inversión que otorga el 12.3%.

a) ¿De qué cantidad deben ser los depósitos si hoy hace el 1°?
b) Si prefiere hacer sólo 10 pagos ¿Qué sucede?
c) Interpretar resultados.

Desarrollo

a) Cálculo de la renta:

Fórmulas: $$R = \frac{Mi}{(1+i)^{n+1} - i - 1}$$

Datos:
$$M = 102{,}500.00$$
$$J = 0.123$$
$$m = 6$$
$$n_a = 2$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución: $$i = \frac{0.123}{6} = 0.0205 \qquad n = 2 \times 6 = 12$$

$$R = \frac{102{,}500 \times 0.0205}{(1+0.0205)^{12+1} - 0.0205 - 1}$$

$$R = 7{,}467.81$$

b) 10 pagos:

Fórmulas: $R = \dfrac{Mi}{(1+i)^{n+1} - i - 1}$

Datos:

$M = 102{,}500.00$

$J = 0.123$

$m = 6$

$n_a = 1.666667$

$i = \dfrac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

Solución: $i = \dfrac{0.123}{6} = 0.0205$ $n = 1.66667 \times 6 = 10$

$$R = \frac{102{,}500 \times 0.0205}{(1+0.0205)^{10+1} - 0.0205 - 1}$$

$R = 9{,}151.98$

c) Interpretación:

Al realizar sólo 10 depósitos en lugar de 12 (16.7% menos), el monto de los depósitos se incrementan en un $ 1,684.17 o sea un 22.6% más.

Fórmulas para calcular el tiempo o plazo en una anualidad simple, cierta, anticipada

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

	$n = 1 - \dfrac{Ln\left(1 + i - \dfrac{Ci}{R}\right)}{Ln\ \left(1 + i\right)}$	(5)
en donde	$i = \dfrac{J}{m}$	

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la tasa nominal o la tasa efectiva por periodo y la frecuencia de conversión:

	$n = \dfrac{Ln\ \left(1 + i + \dfrac{Mi}{R}\right)}{Ln\ \left(1 + i\right)} - 1$	(6)
en donde	$i = \dfrac{J}{m}$	

Ejercicio 7. ¿Cuántos depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 con una tasa de 20% capitalizable trimestralmente se deben hacer para obtener un monto de $178,550.21?

Desarrollo

Fórmulas:

$$n = \frac{Ln\ \left(1 + i + \dfrac{Mi}{R}\right)}{Ln\ \left(1 + i\right)} - 1$$

Datos:

$$M = 178,550.21$$
$$R = 25,000.00$$
$$J = 0.20$$
$$m = 4$$

$$i = \frac{J}{m}$$

Solución: $$i = \frac{0.20}{4} = 0.05$$

$$n = \frac{Ln\left(1+0.05+\frac{178{,}551.21\times 0.05}{25{,}000}\right)}{Ln\,(1+0.05)} - 1$$

$$n = 6\ trimestres$$

Ejercicio 8. Una persona desea jubilarse al reunir $500,000.00 mediante depósitos mensuales anticipados de $2,000.00. Si la tasa de inversión es del 1.25% mensual, calcular:

a) En cuánto tiempo se reunirá esa cantidad.

b) Si los pagos se reducen en un 50%, calcular el nuevo plazo.

c) Interpretar resultados.

Desarrollo

a) Cálculo del plazo:

Fórmulas: $$n = \frac{Ln\left(1+i+\frac{Mi}{R}\right)}{Ln\,(1+i)} - 1$$

Datos:

$$M = 500{,}000$$
$$R = 2{,}000$$
$$i = 0.0125$$

Solución:

$$n = \frac{Ln\left(1+i+\frac{500{,}000\times 0.0125}{2{,}000}\right)}{Ln\ (1+0.0125)} - 1$$

$$n = 113.315915\ meses = 9\ años\ 5\ meses\ 9\ días$$

b) Pagos se reducen en un 50%:

Fórmulas para calcular la tasa de interés de una anualidad simple, cierta, anticipada

Debido a que la tasa de interés se encuentra en el numerador y en el denominador de las fórmulas de monto y valor actual de una anualidad simple, cierta, anticipada, no se puede despejar por lo que se usa para su cálculo, el **procedimiento** llamado de **prueba** y **error a base de iteraciones sucesivas**.

También se puede utilizar una calculadora programable, calculadora financiera o una computadora con software financiero.

a) Si se conoce el capital inicial, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$\frac{C}{R} = 1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}$	(7)
siendo: $i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$	

b) Si se conoce el monto futuro, la renta, la frecuencia de conversión y el plazo de tiempo o número de periodos de capitalización:

$\frac{M}{R}=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1$	(8)
siendo: $i=\frac{J}{m}$ y $n=n_a\times m$	

Ejercicio 9. ¿Cuál es la tasa de interés si se realizan 6 depósitos trimestrales anticipados de $25,000.00 para obtener un monto de $178,550.21?

Desarrollo

Fórmulas: $$\frac{M}{R}=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1$$

Datos:

$M=178,550.21$

$R=25,000.00$

$m=4$

$n=6$

Solución:

$$\frac{178,550.21}{25,000}=\frac{(1+i)^{6+1}-1}{i}-1=7.142008$$

$$Si\ \ i=0.04 \qquad \frac{(1+i)^{7}-1}{i}-1=6.898294$$

$$Si\ \ i=0.055 \qquad \frac{(1+0.055)^{7}-1}{0.055}-1=7.266894$$

$$Si\ \ i=0.05 \qquad \frac{(1+0.05)^{7}-1}{0.05}-1=7.102008$$

$$\therefore\ \ i=0.05\ trimestral=20\%\ anual$$

Ejercicio 10. ¿A qué tasa de interés anual 5 depósitos anuales anticipados de \$50,000.00 equivalen a un valor actual de \$200,000.00?

Desarrollo

Fórmulas: $$\frac{C}{R} = 1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}$$

Datos:

$C = 200{,}000.00$

$R = 50{,}000.00$

$m = 1$

$n_a = 5$

$n = m \times n_a$

Solución: $n = 1 \times 5 = 5$

$$\frac{200{,}000}{50{,}000} = 4 - 1 = 3 = \frac{1-(1+i)^{-4}}{i}$$

$Si \;\; i = 0.15$ $$\frac{1-1.15^{-4}}{0.15} = 2.854978$$

$Si \;\; i = 0.13$ $$\frac{1-1.13^{-4}}{0.13} = 2.974471$$

$Si \;\; i = 0.125$ $$\frac{1-1.25^{-4}}{0.125} = 3.005639$$

$$\therefore \;\; i = 0.125 \; anual = 12.5\% \; anual$$

ACTIVIDAD 1

Descarga los siguientes **ejercicios** y resuélvelos en un procesador de texto. Una vez que tengas todos, ingresa tus resultados en el espacio en blanco.

• Una persona alquila un local acordando pagar $2,750.00 de renta mensual. Sin embargo, por motivo de viaje desea adelantar un año de renta.

a) Calcular el valor de esa renta anticipada si la tasa de rendimiento en un banco es del 16.5%.

C= $____

b) Si la tasa fuera de un 15.5% ¿Cuál sería el pago adelantado de un año?

c) Interpreta tu resultado. (Da tu interpretación dando clic en el botón "Editar mi envío" que aparece al final de la página)

C=$____

• Una persona debe pagar $102,500.00 dentro de 2 años y para reunir esa cantidad, decide efectuar 12 depósitos bimestrales en una cuenta de inversión que otorga el 12.3%.

a) ¿De qué cantidad deben ser los depósitos si hoy hace el 1°?

R=____

b) Si prefiere hacer sólo 10 pagos ¿Qué sucede?

c) Interpreta tu resultado. (Da tu interpretación dando clic en el botón "Editar mi envío" que aparece al final de la página)

R=$____

• A qué tasa de interés anual 5 depósitos anuales anticipados de $50,000.00 equivalen a un valor actual de $200,000.00.

R=______________________________**%** anual.

• Rosa Jáuregui quiere hacer 6 depósitos trimestrales, al inicio del próximo trimestre, en Banorte por $25,000.00 cada uno. Si la tasa de interés que ofrece el banco es del 20% capitalizable trimestralmente,

¿Cuánto acumulará Rosa al final del 6to trimestre?

M=$____

Bibliografía básica

Autor	Capítulo	Páginas
1. Díaz	5	200-240

Autoevaluación

Responde las siguientes preguntas en el espacio correspondiente (coloca sólo dos decimales para las que así lo requieran). Una vez que concluyas, obtendrás tu calificación de manera automática.

1. Cuando nació Marcos Roca, su abuelo le depósito en una cuenta $10,000.00 para su educación universitaria y le dijo a su padre que él tenía que hacerle depósitos mensuales por $300.00 ese mismo día hasta que cumpliera 12 años. En esa fecha, el padre ya no hará mas depósitos, pero el dinero lo podrán retirar hasta el día que Marcos cumpla 18 años para que ingrese a la universidad.

¿Qué cantidad de dinero tendrá la cuenta cuando Marcos cumpla 18 años, si la tasa de interés permanece fija de 18.6% con capitalización mensual?

M= $ ________________

2. SUMESA quiere invertir durante los próximos 12 años, al inicio de cada mes, $5,000.00 en un fondo para la depreciación de sus equipos. ¿Cuál es el valor presente de esta anualidad si la tasa de interés es del 2.35% mensual?

C= $ ________________

3. ¿Cuántos pagos anticipados deben hacerse de $650.20 para saldar una compra a crédito de $6,650.20 si se dio un enganche de $650.20 y los intereses que se pagarán son de 22% capitalizables mensualmente?

R= ________________ meses

4. ¿Cuántos depósitos trimestrales tendrá que hacer Rosa Jaurégui de $25,000.00 al inicio de cada trimestre en una institución que ofrece el 20% capitalizable trimestralmente para reunir $178,550.21?

R= ________________ trimestres

5. Hice 6 depósitos al inicio de cada trimestre en Banorte y reuní al final $ 178,550.21. Si la tasa de interés que daba el banco fue del 20% capitalizable trimestralmente, ¿Cuánto depositaba cada trimestre?

R= $ ________________

Tema 4. Anualidades diferidas

Objetivo del tema

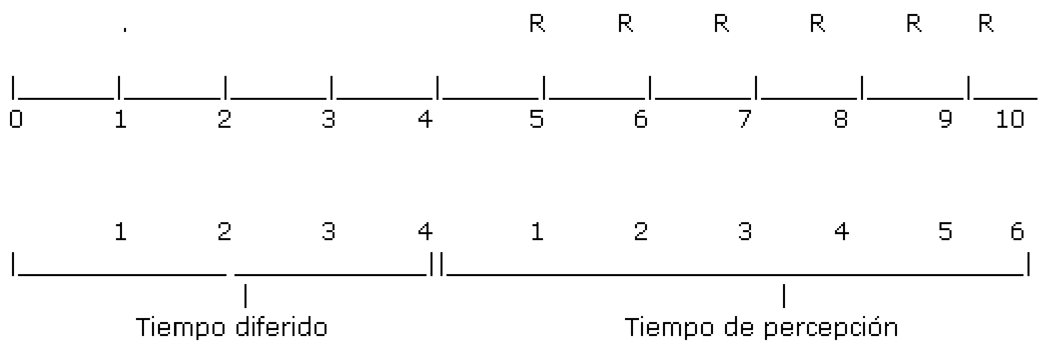
Identificar qué es una anualidad diferida y calcular montos, el valor actual, la tasa de interés y el tiempo, aplicando las herramientas necesarias en problemas que impliquen anualidades diferidas.

Desarrollo

Cuando la serie de pagos se inicia en alguna fecha futura, decimos que su pago se aplaza o se difiere. En este tipo de anualidades, hay dos tiempos:

- **a.** Diferido o intervalo de aplazamiento, en el que no se realiza pago alguno. Se le llama r.
- **b**. De percepción (n).

La gráfica siguiente ejemplifica el caso de anualidades ordinarias diferidas:



Como se ve en el diagrama, el primer pago se realizará en una fecha futura, es decir, al terminar el quinto periodo y durante cuatro periodos no se hace pago. Es evidente que éste es un caso de anualidades ordinarias diferidas.

Cálculo del monto de anualidades diferidas

Se utilizan las mismas fórmulas de una anualidad simple cierta ordinaria o anticipada, ya que lo único que se modifica es el inicio del primer pago o depósito, el cual se efectúa hasta después de transcurrido un intervalo de tiempo desde el momento en que la operación quedó formalizada.

El resultado del monto futuro de una **anualidad diferida** es exactamente el mismo que el de una **anualidad inmediata**.

El monto de las anualidades diferidas vencidas es igual al de las anualidades ordinarias, en las mismas condiciones de importe de la renta, plazo o tiempo y tasa de interés. Esto se debe a que, durante el tiempo diferido, no se realiza ningún pago o depósito. En el ejercicio 2, en el inciso b, se considera y comprueba el monto de una anualidad diferida.

Cálculo del valor presente de anualidades diferidas

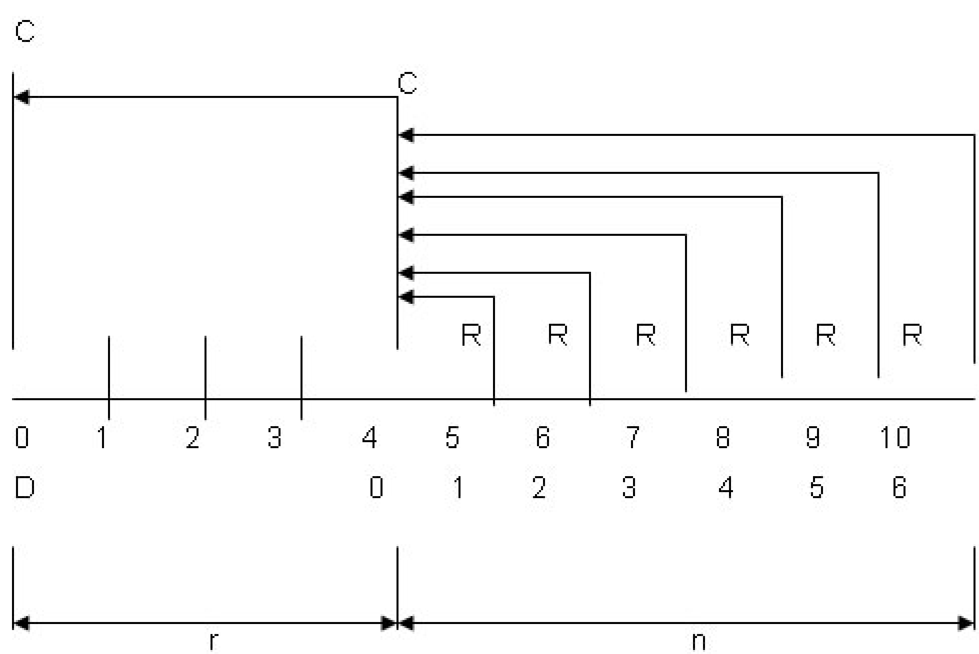
Se utilizan las mismas fórmulas de una anualidad simple cierta ordinaria o anticipada, ya que lo único que se modifica es el inicio del primer pago o depósito, el cual se efectúa hasta después de transcurrido un intervalo de tiempo desde el momento en que la operación quedó formalizada.

En este caso, es importante considerar el **plazo diferido**, que se llama también **plazo de gracia**, para traer a valor presente al inicio de la operación el **valor actual de la anualidad** simple, cierta, ordinaria.

El valor presente de las anualidades ordinarias coincide con la iniciación del tiempo de pago, en tanto que el valor actual de las anualidades diferidas se sitúa en el comienzo del tiempo diferido. En otras palabras, el valor actual de las anualidades diferidas se calcula a una fecha anterior de aquella a la cual se calcula el valor presente de las anualidades ordinarias. Así, en el ejemplo del diagrama siguiente, el valor actual de las anualidades diferidas se calcularía en el 0, en tanto que, si no existiera el tiempo diferido y nos encontráramos frente a un caso de anualidades ordinarias, su valor actual se determinaría en el 4.

Para encontrar el valor actual de las anualidades diferidas, se puede calcular el valor presente como si se tratara de anualidades ordinarias a la fecha en que se inicia el periodo de pago. Conocido ese valor, lo descontamos por el tiempo diferido para regresarlo, en el tiempo, a la fecha de iniciación del periodo de aplazamiento.

Lo anterior, en forma de diagrama, se expresa de la siguiente manera:



Valor actual de una anualidad diferida

Ejercicio 1. ¿Cuál es el valor actual diferido de 6 rentas mensuales, de \$25,000.00 cada una, si se comienza a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, y la tasa es del 24% convertible mensualmente?

```
A      .                 A1     R     R     R     R     R     R

|______|______|______|______|______|______|______|______|_____|_____|
  0      1      2      3      4      5      6      7      8      9
10
```

En el diagrama, se ve que el número de pagos que no se realizarán es 4, por lo que:

a₁) *Cálculo de* A_1*:*

Desarrollo

Fórmulas: $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Datos:

$R = 25{,}000.00$

$J = 0.24$

$m = 12$

$n = 6$

$i = \dfrac{J}{m}$

Solución: $i = \dfrac{0.18}{12} = 0.015$

$A_1 = 25{,}000\dfrac{1-(1+0.02)^{-6}}{0.02}$ $\quad A_1 = 140{,}035.77$

a$_1$) *Cálculo de A:*

Desarrollo

Fórmulas: $A = A_1(1+1)^{-n}$

Datos:
$A_1 = 140,035.77$
$i = 0.02$
$n = 4$

Solución:

$$A = 140,035.77(1+0.02)^{-4}$$

$$A = 129,371.40$$

Hagamos la comprobación aritmética:

Capital	$129,371.40
Intereses del primer mes	2,587.43
Monto al final del primer mes	131,958.83
Intereses del segundo mes	2,639.17
Monto al final del segundo mes	134,598.00
Intereses del tercer mes	2,691.96
Monto al final del tercer mes	137,289.96
Intereses del cuarto mes	2,745.80
Monto al final del cuarto mes	140,035.76
Intereses del quinto mes	2,800.71
Suma	142,836.47

Menos la primera renta	25,000.00
Capital al final del quinto mes	117,836.47
Intereses del sexto mes	2,356.73
Suma	120,193.20
Menos la segunda renta	25,000.00
Capital al final del sexto mes	95,193.20
Intereses del séptimo mes	1,903.87
Suma	97,097.07
Menos la tercera renta	25,000.00
Capital al final del séptimo mes	72,097.07
Intereses del octavo mes	1,441.94
Suma	73,539.01
Menos la cuarta renta	25,000.00
Capital al final del octavo mes	48,539.01
Intereses del noveno mes	970.78
Suma	49,509.79
Menos la quinta renta	25,000.00
Capital al final del noveno mes	24,509.79
Intereses del décimo mes	490.21
Suma	25,000.00
Menos la sexta renta	25,000.00
Al final del décimo mes	0.00

Lo anterior ha demostrado la exactitud del valor actual que hemos calculado.

Ejercicio 2. Un almacén oferta: "compre ahora… pague después" un mueble que un comprador recibe el 1° de octubre y debe pagar 12 mensualidades de $1,800.00 a partir del 1° de enero del año siguiente. Si se considera el interés al 18% convertible mensualmente:

a) ¿Cuál es el valor de contado?

b) Calcular el monto futuro mediante una anualidad y comprobar con el valor actual a interés compuesto.

Desarrollo

a) Valor de contado:

a_1) Cálculo de A_1:

Fórmulas: $$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Datos:

$$R = 1{,}800$$
$$J = 0.18$$
$$m = 12$$
$$n_a = 1$$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución:

$$i = \frac{0.18}{12} = 0.015 \qquad n = 1 \times 12 = 12$$

$$A_1 = 1{,}800\frac{1-(1+0.015)^{-12}}{0.015} \qquad A_1 = 19{,}633.51$$

a₁) Cálculo de A:

Fórmulas: $A = A_1(1+1)^{-n}$

Datos:

$R = 1{,}800$

$J = 0.18$

$m = 12$

$n_a = 0.166667$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Solución:

$$i = \frac{0.18}{12} = 0.015 \qquad n = 0.166667 \times 12 = 2$$

$$A_1 = 19{,}633.51(1+0.015)^{-2} \qquad A_1 = 19{,}057.50$$

b) Cálculo del monto futuro:

b₁) Cálculo del monto futuro anualidad:

Fórmulas: $M = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Datos:

$R = 1{,}800.00$

$i = 0.015$

$m = 12$

$n_a = 1$

$$n = m \times n_a = 12 \times 1 = 12$$

Solución:

$$M = 1{,}800\frac{(1+0.015)^{12} - 1}{0.015}$$

$$M = 23{,}474.18$$

b_2) Cálculo del monto futuro a interés compuesto:

Fórmulas: $M = C(1+i)^n$

Datos:
$C = 19{,}057.50$
$i = 0.015$
$n = 14$ *meses*

Solución:

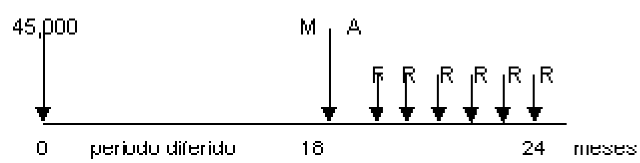
$$M = 19{,}057.50(1+0.015)^{14} = 23{,}474.18$$

Los resultados son idénticos.

Ejercicio 3. Un capital de $45,000.00 se coloca en un pagaré de una institución financiera que otorga el 8.5% anual durante un año y medio, con el objeto de obtener un monto futuro de capital que cubra una buena parte de la colegiatura de un estudiante. Si se conoce que el costo de la colegiatura es de 75,000.00 para el próximo semestre, calcular el valor presente de la nueva anualidad y el monto de sus pagos si se contempla una tasa de interés del 10.5%.

Monto futuro:

Diagrama:



Fórmula: $M = C(1+i)^n$

$$i = \frac{J}{m} \quad y \quad n = n_a \times m$$

Datos:

$$C = 45{,}000$$
$$J = 0.085$$
$$m = 12$$
$$n_a = 1.5$$

Solución:

$$i = \frac{0.085}{12} = 0.007083$$

$$n = 1.5 \times 12 = 18$$

$$M = 45{,}000 \times 1.007083^{18} = 51{,}096.35$$

Valor presente:

De la nueva anualidad: *A=75,000.00 – 51,096.35 = 23,903.65*

Cálculo de la renta:

Caso 1) $R' = \frac{Ri}{(1+i)^n} - 1$	(1)

Interpretación:

Por el pago parcial efectuado de $51,096.35, se reduce la anualidad en 3.14 veces, por lo que la renta mensual también se reduce en la misma cantidad, representando entonces un 61.8% menos, por lo que el ahorro financiero es considerable.

Caso general de anualidades

En todos los problemas resueltos hasta el momento, los periodos de capitalización han coincidido con los de pago. Es decir, para rentas trimestrales, consideramos la tasa trimestral; para pagos mensuales, tasas mensuales y así sucesivamente. Sin embargo, hay casos en que los periodos de pago no coinciden con los de capitalización. En estas circunstancias, lo primero que se debe hacer es unificar la tasa de interés a los periodos de pago: si los pagos son semestrales, la tasa de interés también debe estar en forma semestral y así sucesivamente. Precisamente estos problemas son considerados en las anualidades generales.

Existen 2 métodos para convertir las anualidades de tipo general en anualidades simples:

- **a)** Determinar la tasa de interés equivalente.
- **b)** Determinar la renta equivalente.

A su vez, se pueden presentar dos casos en relación a los periodos de depósitos o pagos:

- **1)** Periodo de pago más largo que el de capitalización.
- **2)** Periodo de capitalización más largo que el periodo de pago.

Fórmulas de tasa equivalente

Caso 1)	$i' = (1+i)^{p} - 1$	(2)
Caso 2)	$i = (1+i')^{1/p} - 1$	(3)

Fórmulas de renta equivalente

Caso 1)	$R' = \frac{Ri}{(1+i)^p} - 1$	(4)
Caso 2)	$R' = R\frac{(1+i')^p - 1}{i'}$	(5)

Luego, para solucionar los casos generales de anualidades, se debe hacer lo siguiente:

a. Determinar las tasas o rentas equivalentes para que tanto la tasa de interés como los pagos estén en la misma unidad de tiempo.

b. Manejar el problema como una anualidad simple y utilizar la fórmula respectiva, según la anualidad que corresponda a cada ejercicio.

Ejercicio 4. Encontrar el monto y el valor presente de un conjunto de 5 pagos trimestrales vencidos de $25,000.00 si el interés es del 21.6% convertible mensualmente (Caso 1).

Desarrollo

a) Tasa equivalente:

Fórmulas: $i' = (1+i)^p - 1$

Datos:

$J = 0.216$

$m = 12$

$p = 3$

$i = \frac{J}{m}$

Solución:

$i = \frac{0.216}{12} = 0.018$

$i' = (1+0.018)^3 - 1 = 0.054978$

a_1) Cálculo monto futuro:

Fórmulas: $M = R\frac{(1+i')^n - 1}{i'}$

Datos:

$R = 25{,}000.00$

$i' = 0.054978$

$n = 5$

Solución: $$M = 25,000\frac{(1+0.054978)^5 - 1}{0.054978} = 139,521.10$$

a₂) Cálculo valor presente:

Fórmulas: $$A = R\frac{1-(1+i')^{-n}}{i'}$$

Datos:
$$R = 25,000.00$$
$$i' = 0.054978$$
$$n = 5$$

Solución: $$A = 25,000\frac{1-(1+0.054978)^{-5}}{0.054978} = 106,763.60$$

b) Renta aequivalente:

Fórmulas: $$R' = \frac{Ri}{(1+i)^p} - 1$$

Datos:
$$R = 25,000$$
$$J = 0.216$$
$$m = 12$$
$$p = 3$$

$$i = \frac{J}{m}$$

Solución: $$i = \frac{0.216}{12} = 0.018$$

$$R' = \frac{25,000 \times 0.018}{(1+0.018)^3} - 1 = 8,185.12$$

b₁) Cálculo monto futuro:

Fórmulas: $$M = R' \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Datos:
$R' = 8{,}185.12$
$i = 0.018$
$n = 15$

Solución: $$M = 8{,}185.12 \frac{(1+0.018)^{15} - 1}{0.018} = 139{,}521.15$$

b₂) Cálculo valor presente:

Fórmulas: $$A = R' \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Datos:
$R = 8{,}185.12$
$i' = 0.018$
$n = 15$

Solución: $$A = 8{,}185.12 \frac{1-(1+0.018)^{-15}}{0.018} = 106{,}763.64$$

Las cantidades de monto futuro y valor presente por los 2 métodos son idénticas.

Ejercicio 5. Obtener el monto y el valor presente de un conjunto de 10 depósitos mensuales vencidos de $5,500.00 si el interés que gana es del 12.8 % con capitalización semestral (Caso 2).

Desarrollo

a) Tasa equivalente:

Fórmulas: $i' = (1+i)^{1/p} - 1$

Datos:

$J = 0.128$

$m = 2$

$p = 6$

$$i = \frac{J}{m}$$

Solución:

$$i = \frac{0.128}{2} = 0.064$$

$$i' = (1+0.064)^{1/6} - 1 = 0.010393$$

a_1) Cálculo monto futuro:

Fórmulas: $M = R\dfrac{(1+i')^n - 1}{i'}$

Datos:

$R = 5,500.00$

$i' = 0.010393$

$n = 10$

Solución: $$M = 5,500\frac{\left(1+0.010393\right)^{10}-1}{0.010393} = 57,644.83$$

a_2) Cálculo valor presente:

Fórmulas: $$A = R\frac{1-\left(1+i'\right)^{-n}}{i'}$$

Datos:

$R = 5,500.00$

$i' = 0.010393$

$n = 10$

Solución: $$A = 5,500\frac{1-\left(1+0.010393\right)^{-10}}{0.010393} = 51,982.56$$

b) Renta aequivalente:

Fórmulas: $R' = \frac{Ri}{(1+i)^{p}} - 1$

Datos:

$R = 5,500$

$i' = 0.010393$

$p = 6$

Solución: $R' = 5,500\frac{(1+.010393)^{6} - 1}{0.010393} = 33,869.39$

b_1) Cálculo monto futuro:

Fórmulas: $M = R'\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$

Datos:

$R' = 33,869.39$

$J = 0.128$

$m = 2$

$n_a = {}^{10}\!/_{12} = 0.833333$

$i = \frac{J}{m}$ y $n = n_a \times m$

$i = \frac{0.128}{2} = 0.064$ $n = 0.833333 \times 2 = 1.666667$

Solución: $M = 33,869.39\frac{(1+0.064)^{1.666667} - 1}{0.064} = 57,644.84$

b_2) Cálculo valor presente:

Fórmulas: $$A = R' \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Datos:

$R = 33{,}869.39$

$i' = 0.064$

$n = 1.666667$

Solución: $$A = 33{,}869.39 \frac{1-(1+0.064)^{-1.666667}}{0.064} = 51{,}982.57$$

Las cantidades de monto futuro y valor presente por los 2 métodos son idénticas.

El concepto de anualidad en sus diferentes expresiones tiene una importante aplicación en diversos ámbitos, desde negocios internacionales, empresariales, hasta operaciones financieras particulares y personales.

El mundo actual, que se caracteriza por la gran facilidad de acceso a la información y el avance en las comunicaciones, proporciona los medios más adecuados para conocer con mayor facilidad los diferentes esquemas de financiamiento y créditos, que están sustentados en operaciones con base en los diversos tipos de anualidades estudiadas. Como ejemplos, se tienen los créditos a la vivienda, créditos para la adquisición de automóviles o para otros fines como los financiamientos a la educación por medio de instituciones financieras de ahorro y préstamo o del sistema bancario comercial.

ACTIVIDAD 1

Descarga los siguientes **ejercicios** y resuélvelos en un procesador de texto. Una vez que tengas todos, ingresa tus resultados en el espacio en blanco.

• Un capital de $45,000.00 se coloca en un pagaré de una institución financiera que otorga el 8.5% anual durante un año y medio, con el objeto de obtener un monto futuro de capital que cubra una buena parte de la colegiatura de un estudiante. Si se conoce que el costo de la colegiatura es de $75,000.00 para el próximo semestre. Calcular el valor presente de la nueva anualidad y el monto de sus pagos si se contempla una tasa de interés del 10.5%.

A=$__________

M=$__________

• ¿Cuál es el valor actual diferido de 6 rentas mensuales, de $25,000.00 cada una, si se comienza a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, y la tasa es del 24% convertible mensualmente?

C = $__________

• Para liquidar una deuda de $129,371.40, comenzando a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, con una tasa de 24% convertible mensualmente. ¿De cuánto serán los pagos?

R = $____________

• ¿Cuál es el número de rentas mensuales de $25,000.00 cada una, si se empiezan a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, para liquidar una deuda de $129,371.40, con una tasa de 24% convertible mensualmente?

R=______________ pagos mensuales.

• Raúl González quiere rentar un departamento que cobra $12,000.00 mensual. El dueño le dice que podrá hacerle un considerable descuento si le paga 15 meses por adelantado. Una institución da intereses del 12% con capitalización mensual. Raúl quiere saber cuál sería el valor actual de las 15 rentas y ver si le conviene el trato con el dueño.

A=$___________

Bibliografía básica

Autor	**Capítulo**	**Páginas**
2. Hernández	7	414-427

Autoevaluación

Responde las siguientes preguntas en el espacio correspondiente (coloca sólo dos decimales para las que así lo requieran). Una vez que concluyas, obtendrás tu calificación de manera automática.

1. El día que Marisela cumpla 15 años, su padre depositará una cantidad de dinero en una inversión de tal manera que ella reciba $500,000 cada año durante 5 años consecutivos. La primera anualidad la recibirá Marisela cuando cumpla 21 años; la segunda, cuando cumpla 22 y así sucesivamente.

Si la tasa de interés es del 22%, di la cantidad de dinero que deberá depositar el padre de Marisela en la cuenta.

C= $ ____________________

2. ¿Cuánto tendrá que pagar anualmente una persona durante los próximos 6 años para liquidar un adeudo de $500,000 si la tasa es del 5.5% anual efectiva?

R= $ ____________________

3. Un padre desea que su hijo de 5 años reciba, después de que cumpla 15 años y en forma vencida, $180,000 anuales hasta que cumpla 24, a fin de asegurar sus estudios. ¿Cuánto debe depositar en este momento si el banco le otorga una tasa del 12% anual efectiva?

R= $ ____________________

4. Obtener el valor presente de un conjunto de 10 depósitos mensuales vencidos de $5,500.00 si el interés que gana es del 12.8% con capitalización semestral.

A= $ ____________________

5. Obtener el monto de un conjunto de 10 depósitos mensuales vencidos de $5,500.00 si el interés que gana es del 12.8 % con capitalización semestral.

M= $ ___________________

Cuestionario de autoevaluación

Responde las siguientes preguntas.

Realiza esta actividad en un procesador de textos, guárdala en tu computadora y, una vez concluida, presiona el botón **Examinar**, localiza el archivo, selecciónalo y haz clic en **Subir este archivo** para guardarlo en la plataforma.

1. ¿Cómo se definen las anualidades y la renta de una anualidad?
2. Explica brevemente los conceptos de plazo e intervalo de pago en las anualidades.
3. ¿Qué son el monto y valor presente de una anualidad?
4. Menciona tres ejemplos de anualidades en la vida real y resalta sus principales características.
5. Indica las diferencias básicas entre una anualidad simple y una anualidad de tipo general.
6. Explica las diferencias básicas entre una anualidad ordinaria y una anualidad anticipada.
7. Explica las diferencias básicas entre una anualidad cierta y una anualidad contingente.
8. Explica las diferencias básicas entre una anualidad inmediata y una anualidad diferida.
9. Explica el significado y utilización de las tasas equivalentes en anualidades.
10. Explica el significado y utilización de las rentas equivalentes en anualidades.

Examen de autoevaluación

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas. Una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

1. Cuando se realizan pagos periódicos al final de cada periodo de pago, se trata de una anualidad:

- **a)** Diferida
- **b)** Anticipada
- **c)** Vencida
- **d)** General
- **e)** Contingente

2. El factor de ajuste para transformar una anualidad vencida a una anualidad anticipada es:

- **a)** (1 + i)n
- **b)** (1 + i) –1
- **c)** (1 + i)
- **d)** A i
- **e)** A / i

3. El valor actual de 25 rentas quincenales de $1,500 con intereses del 48% capitalizable quincenal es de:

- **a)** $25,337.83
- **b)** $29,285.18
- **c)** $27,237.86
- **d)** $31,374.65
- **e)** $32,987.30

4. ¿Cuánto tendrá que pagar anualmente una persona durante los próximos 6 años para liquidar un adeudo de $500,000 si la tasa es del 5.5% anual efectiva?

- **a)** $ 83 333.33
- **b)** $ 98 523.45
- **c)** $ 100 089.47
- **d)** $ 102 875.35
- **e)** $120 000.00

5. ¿Cuánto acumulará una persona dentro de 4 años si efectúa $15,000 al final de cada año en una cuenta de ahorro que paga el 8% anual efectivo?

- **a)** $ 49 681.91
- **b)** $ 60 000.00
- **c)** $ 63 696.96
- **d)** $ 64 392.15
- **e)** $ 67 591.68

6. Para acumular $90,000.00 con intereses del 18% y una capitalización trimestral, se requiere realizar 16 depósitos trimestrales de:

- **a)** $3,234.56
- **b)** $3,621.38
- **c)** $3,961.38
- **d)** $4,242.52
- **e)** $4,766.95

7. ¿Cuántos pagos mensuales de $2,828.32 deben efectuarse para liquidar una deuda de $113,000.00 si se da un enganche del 35% sobre el valor de la deuda y se impone una tasa del 24% capitalizable mensualmente?

- **a)** 32
- **b)** 37
- **c)** 40
- **d)** 43
- **e)** 50

8. Si a partir de este momento, en forma anticipada, una persona deposita anualmente 5 pagos de $50,000.00 cada uno, ¿cuánto habrá acumulado si le ofrecen una tasa de interés anual del 8%?

- **a)** $199 635.50
- **b)** $215 606.34
- **c)** $232 854.48
- **d)** $293 330.05
- **e)** $316 796.50

9. ¿Cuál es el valor presente de 8 pagos anuales anticipados de $21,750.00 cada uno a una tasa de interés del 8% anual efectiva?

- **a)** $124 989.40
- **b)** $132 147.92
- **c)** $134 988.55
- **d)** $ 231 346.65
- **e)** $249 854.38

10. Un padre desea que su hijo de 5 años reciba después de que cumpla 15 años, en forma vencida, $180,000 anuales hasta que cumpla 24, a fin de asegurar sus estudios. ¿Cuánto debe depositar en este momento si el banco le otorga una tasa del 12% anual efectiva?

- ❍ **a)** $308 799.70
- ❍ **b)** $318 215.32
- ❍ **c)** $327 459.71
- ❍ **d)** $345 855.65
- ❍ **e)** $959 084.92

Lo que aprendí

En esta unidad, comprendí la diferencia que existe entre los diferentes tipos de anualidades, anticipadas, vencidas y diferidas. Aprendí a utilizar las herramientas para calcular el monto, la renta, el tiempo y la tasa de interés en las anualidades.

Resuelve el siguiente ejercicio

Sears vende un equipo de cine en casa marca Toshiba en $176,000.00 al contado, pero se la pueden llevar si dan un pago de inmediato de $18,747.00 y pagan después 11 mensualidades por la misma cantidad. ¿Qué tasa de interés está cobrando la tienda?

Realiza esta actividad en un procesador de textos, guárdala en tu computadora y, una vez concluida, presiona el botón **Examinar**, localiza el archivo, selecciónalo y haz clic en **Subir este archivo** para guardarlo en la plataforma.

GLOSARIO

Anualidad

Serie de pagos generalmente iguales que se realizan a intervalos de tiempo iguales.

Diferida

Intervalo de aplazamiento en el que no se realiza pago alguno.

Renta

Depósito o pago periódico.

MESOGRAFÍA

Referencias Bibliográficas

1. DIAZ MATA, Alfredo, Aguilera Gómez, Víctor M. "Interés simple" en Matemáticas Financieras, 4ta. Edición, Mc Graw Hill, México, 2007.
2. HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, Abraham, "Interés Simple", en Matemáticas Financieras, 3ra. Edición, ECAFSA, México, 1996
3. VIDAURRI AGUIRRE, Héctor Manuel, "Interés simple" en Matemáticas Financieras, 1ra. Edición, México, 1997.
4. VILLALOBOS, José Luis, "Interés simple" en Matemáticas Financieras, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1993.

Sitios electrónicos

Sitio	Descripción
http://www.abanfin.com/modules.php?tit=descuento-simple-y-descuento-comercial&name=Manuales&fid=eg0bcad	Descuento simple y desarrollo comercial
http://www.cme-malaga.es/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=30	Descuento bancario
http://www.gestiopolis.com/canales/financiera/articulos/31/anuali.htm	Anualidades diferidas, perpetuas y generales.
http://es.wikipedia.org/wiki/Anualidad	Anualidad