1.3 Sistemas numéricos

1.3.1. Introducción

Un sistema de representación numérica es un lenguaje que consiste en: Un conjunto ordenado de símbolos (dígitos o cifras) y otro de reglas bien definidas para las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división[1]. Los números en un sistema de numeración consisten en una secuencia (vector) de dígitos que pueden tener parte entera y parte fraccionaria, ambas separadas por una coma o punto, entonces: ***(N)r = [(parte entera), (parte fraccionaria)]r***

Los **sistemas numéricos** son el conjunto de símbolos o signos utilizados para expresar números. Cualquier estudiante sabe que "2653" denota el número "dos mil seiscientos cincuenta y tres" y puede comprender su significado. Nosotros estamos acostumbrados a escribir los números de la manera siguiente: El último dígito denota el número de unidades del número dado; el siguiente, el de decenas; el siguiente, el de centenas y así sucesivamente. Esta forma de escribir los números es llamada sistema de numeración en base 10, digamos el sistema de numeración que empleamos. En este sistema "decimal" se acostumbra decir que la base es diez o el sistema es en base diez. De esta manera podemos tener la base: binaria (como entiende la computadora), octal, hexadecimal, y sistemas numéricos con base r.

La base (r) de un sistema de numeración especifica el número de dígitos o cardinales (el cardinal o cardinalidad indica el número o cantidad de elementos en un conjunto) de un conjunto ordenado. Las bases más utilizadas son:

- ***base 2 : binaria = {0,1}***
- ***base 10: decimal = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}***
- ***base 16: hexadecimal = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,F}***
- ***base 8: octal = {0,1,2,3,4,5,6,7}***

Conversiones entre bases. Podemos jugar un poco con las bases y hacer conversiones de una base binaria, octal, hexadecimal, decimal, a otra diferente, ya sea de éstas u alguna diferente como la vigesimal. Por ejemplo, si queremos

[1] https://dac.escet.urjc.es/docencia/ETC-Sistemas/teoria-cuat1/TEMA2.pdf

convertir de una base “r” a una base “s” utilizando la aritmética de la base s [2]. La conversión entre bases consistirá en evaluar directamente dicha expresión usando la aritmética de la base s tanto para la parte entera como para la fraccionaria.

Ejemplo: Se convertirá el número 14 en base 10 tendremos:

$$(14)_{16} = 1 * 16^1 + 4 * 16^0 = 1 * 16 + 4 * 1 = 20_{10}$$

1.3.2. Adición y multiplicación

Veamos ahora cómo se suma y se multiplica en cualquier sistema numérico. En la suma y la multiplicación, el proceso es exactamente igual a lo que se hace en notación decimal, pero teniendo en cuenta que un "acarreo" ocurre cada vez que el resultado de sumar dos dígitos de una columna excede o es igual a la base a la cual están referidos los números.

Por ejemplo, si se suman los números 124_{10} y 417_{10} en el sistema base 3.

Primero se convierten los números en el sistema base 3 de la siguiente manera: $124_{10} = 11121_3$ y $417_{10} = 120110_3$

Nota: para hacer estas conversiones de manera más rápida te puedes ayudar de la siguiente calculadora en Internet[3]:

Segundo: se hace la suma en la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & (1) & & (1) & (1) & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
+ & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

El "acarreo", cuando ocurre aparece entre paréntesis en la parte superior del primer sumando. Por lo tanto tendremos que:

$$202001_3 = 2 \times 3^5 + 0 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 541_{10}$$

---

[2] Esta conversión se usa normalmente para convertir cualquier base (binaria, octal, hexadecimal) a base 10.

[3] http://docencia.udea.edu.co/cen/edp-705/archivos/cap%2010/10-2.htm

1.3.3. Multiplicación por la base

Hasta ahora hemos trabajado con números enteros, pero que pasaría con las fracciones. Las conversiones de base para fracciones pueden realizarse mediante el método de multiplicación por la base de la manera siguiente:

Ejemplo: Se convertirá $(0.1285)_{10}$ a base 8[4].

0.1285	0.0280	0.2240	0.7920	0.3360	0.6880	0.5040	0.0320
$\times 8$	$\times 8$	$\times 8$	$\times 8$	$\times 8$	$\times 8$	$\times 8$	$\times 8$
1.0280	0.2240	1.7920	6.3360	2.6880	5.5040	4.0320	0.2560
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
b_{-1}	b_{-2}	b_{-3}	b_{-4}	b_{-5}	b_{-6}	b_{-7}	

así, $(0.1285)_{10} = (0.10162540...)_8$.

1.3.4. Sistemas numéricos complementarios

Los números complementarios son la base de la aritmética complementaria, un método de gran utilidad que se emplea en los circuitos digitales para realizar operaciones aritméticas con números con signo.

Un número con signo $N = +/- (an\text{-}1...a_0a_{-1}...a\text{-}m)r$ en el formato de magnitud y signo se expresa como $N = (sa_n\text{-}1...sa_0a_{-1}...sa_{-m})_{rsm}$ donde s = 0 si N es positivo y s = r-1 si N es negativo.

Por ejemplo: Se determinará el código de magnitud y signo de $N = -\ (13)_{10}$ en binario y decimal[5].

En binario: $N = -\ (13)_{10} = -\ (1101)_2 = (1,1101)_{2sm}$

En decimal: $N = -\ (13)_{10} = (9,13)_{10sm}$

En los sistemas complementarios, los números positivos se expresan de la misma manera que los números con magnitud y signo, mientras que los

---

[4] http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/m_base.html#ses14_3

[5] http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/s_numericos.html

números negativos se representan como el complemento del número positivo correspondiente.

El complemento a una base y el complemento disminuido a una base son sistemas numéricos importantes que se analizarán a continuación.

1.3.5. Aritmética complemento a una base

Muchas computadoras digitales utilizan un sistema numérico de complemento a base a fin de minimizar la cantidad de circuitos necesarios para realizar la aritmética de enteros[6].

Por ejemplo, se puede realizar la operación A - B calculando A + (-B) donde (-B) está representado por el complemento a 2 de B. Por tanto, la computadora sólo necesita un sumador binario y algunos circuitos complementarios para la suma y la resta.

Otro ejemplo es el siguiente: Se calculará $(9)_{10} + (5)_{10}$ con aritmética de complemento a dos de 5 bits.

$+(9)_{10} = +(1001)_{2} = (0{,}1001)_{2ms}$

$+(5)_{10} = +(0101)_{2} = (0{,}0101)_{2ms}$

Al sumar estos códigos de 5 bits se obtiene

	0	1	0	0	1
	0	0	1	0	1
+	0	1	1	1	0

Como el resultado también tiene un bit de signo 0, representa correctamente la suma derecha, que se interpreta como,

$(0{,}1110)_{2ms} = +(1110)_{2} = (14)_{10}$

[6] http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/aritmetica.html

1.3.6. Sistemas numéricos con complemento disminuido a una base

El complemento de un número sirve para **normalizar y reglamentar** las operaciones aritméticas con signo, de forma que puedan ser procesadas por los circuitos internos de una calculadora o computadora.

El complemento disminuido a una base $[N]_{r-1}$ de un número $(N)_r$ se define como: $[N]_{r-1} = r^n - (N)_r - 1$, donde n es el número de dígitos de $(N)_r$.

Por ejemplo: Se hará la suma (1001) y – $(0100)_2$

$(1001)_2$:		0	1	0	0	1	
- $(0100)_2$:	+	1	1	0	1	1	
		1	0	0	1	0	0

Se obtiene el resultado correcto si el acarreo de salida del bit más significativo se suma a la posición del bit menos significativo[7]. Es decir 00100 + 1 = 00101.

Este procedimiento se conoce como acarreo final circular y es un paso de corrección necesario en la aritmética de complemento disminuido.

Por tanto, $+(1001)_2 - (0100)_2 = (0,0101)_{2ms} = (101)_2$

[7] http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/numericos_base.html